STRUCTURI MATEMATICE DISCRETE ÎN CERCETĂRILE TEORETICO-APLICATIVE

Doctor habilitat în științe fizico-matematice, profesor universitar **Sergiu CATARANCIUC**
Laureat al Premiului „Academician Constantin Sibirschi" – 2017
Universitatea de Stat din Moldova

DISCRETE MATHEMATICAL STRUCTURES IN THEORETICAL AND APPLIED RESEARCH

Summary. The importance of discrete mathematics to solving the theoretical and applied problems is mentioned. A summary of the activities of a two discrete mathematics schools in the Republic of Moldova, which were founded by the professor Alexandru Zâkov and the academician Petru Soltan, is made. Some of the important scientific results obtained by Moldovan mathematicians, the descendants of these schools, are described.

***Keywords*:** discrete mathematics, convexity, graphs, complex of multi-ary relations, center problem, median problem, transitively orientable graphs, information security, encryption systems.

Rezumat. În această lucrare se pune în valoare rolul matematicii discrete în soluționarea problemelor teoretico-aplicative. Se face un rezumat al activității a două școli de matematică discretă din Republica Moldova, care au fost fondate de către profesorul universitar Alexandru Zâkov și academicianul Petru Soltan. Sunt descrise o parte din rezultatele științifice importante, obținute de către matematicienii moldoveni, discipoli ai acestor școli.

***Cuvinte-cheie*:** matematică discretă, convexitate, grufuri, complex de relații multi-are, problema centrului, problema medianei, grafuri tranzitiv orientabile, securitatea informației, sisteme de criptare.

Matematica – una dintre cele mai vechi ramuri ale științei moderne, s-a dezvoltat de-a lungul secolelor atât din necesitatea de a rezolva multiple probleme de ordin practic, parvenite din viața cotidiană a omului, cât și din dorința de a pătrunde cât mai adânc în universul magic al cifrelor, de a studia legitățile lumii înconjurătoare. Această situație ne face deseori să vorbim, în interiorul matematicii, de *Matematica Teoretică* și *Matematica Aplicată*. Chestiune firească, însă dacă ținem cont de starea actuală a lucrurilor, de multiplele direcții de cercetare în matematică, de varietatea domeniilor în care a pătruns matematica datorită modelelor și metodelor de studiu științific, astăzi am putea vorbi de *Matematica Informaticii*, *Matematică Economică*, *Matematică Financiară*, *Biomatematică* etc.

Totuși, matematica, în primul rând, se asociază cu niște mulțimi de elemente în raport cu care sunt formulate și se examinează diverse probleme pentru care se caută metode eficiente de soluționare. Respectiv, pe astfel de mulțimi se definesc diferite funcții. Atunci când mulțimile respective sunt numerabile, de regulă, zicem că avem o problemă din domeniul matematicii discrete. Funcțiile date se numesc funcții discrete. În caz contrar avem de-a face cu matematica continuă. Dacă e să comparăm *Matematica Discretă* și *Matematica Continuă*, atunci este greu de spus care dintre aceste două matematici ar fi mai valoroasă, dar, probabil, nici nu e cazul să o facem. Atât în domeniul matematicii discrete, cât și a celei continui, pe parcursul secolelor au fost obținute un șir de rezultate remarcabile care se completează reciproc, contribuind la elaborarea metodelor de soluționare a diverselor probleme, eficiența cărora, nu în ultimul rând, depinde de modelul matematic ales pentru descrierea adecvată a proceselor studiate.

Totodată, e necesar să menționăm că soluționarea unei părți considerabile de probleme de ordin științific, social, economic etc. se bazează pe instrumentarul oferit de matematica discreta. Aceasta se datorează atât faptului că modelele matematice, reprezentate prin anumite structuri discrete, permit o descriere structural adecvată a procesului studiat, cât și eficienței metodelor de soluționare a problemelor de ordin teoretico-aplicativ. Ba mai mult, deseori la studierea unor procese/probleme de ordin continuu se recurge la discretizarea acestora, ceea ce permite, într-un final, aplicarea tehnicii matematicii discrete pentru obținerea soluției.

Începând cu anii 1950, în Republica Moldova a crescut o pleiadă de specialiști în domeniul matematicii discrete, cunoscuți pe mapamond prin rezultatele valoroase obținute, o parte dintre aceștia activând și astăzi la universități prestigioase de peste hotare și în țară. O contribuție esențială în dezvoltarea matematicii discrete din Republica Moldova, atât prin fundamentarea teoretică a acesteia, cât și prin încercarea de a soluționa mai multe probleme practice, au adus-o Valeriu Soltan – actualmente profesor la Universitatea

A. Zâkov la Chișinău,
anii 1976–1982.

P. Soltan la o conferință științifică
în pădurea de la Chițcani, anii 1960.

George Mason din Virginia (SUA), Vitalie Voloșin – actualmente profesor la Universitatea Troy (statul Alabama, SUA), Victor Cepoi – profesor la Universitatea Mediteraneana din Marsilia (Franța), Feodor Dragan – profesor la Universitatea Kent (SUA), Alexander Zelikovsky – profesor la Universitatea din Georgia (SUA), Dumitru Lozovanu – profesor universitar (Institutul de Matematică și Informatică, Chișinău), Dumitru Zambițchi – conferențiar universitar (ASEM, Chișinău), Dumitru Solomon – profesor, rector ATIC. Desigur, dacă e să continuăm această listă atunci ea ar conține câteva zeci de persoane cunoscute în lumea matematicienilor, cu cercetări importante de ordin teoretico-aplicativ. O mare parte dintre aceștia sunt discipoli a două școli renumite, fondate de savanți cu renume mondial. E vorba de profesorul universitar Alexandru Zâkov și academicianul Petru Soltan.

Matematician cu lucrări de talie mondială în mai multe domenii ale matematicii, cum ar fi analiza matematică, algebra, analiza funcțională, teoria grafurilor, hipergrafuri, profesorul universitar Alexandru Zâkov este cunoscut, în primul rând, drept unul dintre fondatorii teoriei grafurilor moderne. Împreună cu matematicianul francez Clod Berj, „tatăl" teoriei grafurilor și hipergrafurilor, renumit prin editarea primei lucrări monografice în domeniu [1], cu care s-a aflat și în relații amicale foarte bune, au determinat conceptul dezvoltării acestei direcții de investigații științifice. Alexandru Zâkov a activat la Chișinău în calitate de profesor universitar la Universitatea de Stat (actualmente Universitatea de Stat din Moldova) în perioada anilor 1976–1982, reușind să pregătească doctori în științe fizico-matematice care, la rândul său, au îndrumat mai multe generații de tineri savanți.

Academicianul Petru Soltan a fost unul dintre remarcabilii matematicieni ai secolului al XX-lea, numele căruia se poate regăsi într-un șir de enciclopedii științifice. Posedând o înaltă cultură matematică, înzestrat cu o intuiție matematică impecabilă și având amprentele școlilor științifice de la Universitatea „M. V. Lomonosov" din Moscova, fondate de iluștrii matematicieni Nicolai Bogoliubov, Andrei Kolmogorov, Andrei Tihonov ș.a., P. Soltan obține rezultate deosebite în geometrie, topologie, teoria grafurilor, pe care le publică în cele mai prestigioase reviste științifice din URSS. Unele dintre acestea au fost preluate și publicate, cu traducere în engleză, în mai multe reviste de peste hotare. După studiile de la Moscova, revenit la Chișinău, tânărul savant Petru Soltan reușește să adune în jurul său un grup de matematicieni-entuziaști cu care inițiază un seminar științific în cadrul Institutului de Matematică și Informatică. De aici începe propriu-zis renumita școală a viitorului academician. Fiind un bun organizator în știință, academicianul Petru Soltan a pregătit peste 20 de doctori și doctori habilitați în științe fizico-matematice, de-a lungul anilor organizează și participă activ împreună cu discipolii săi la diverse manifestări științifice de diferit rang.

Subsemnatul acestui articol, fiind unul dintre puținii care au beneficiat de ocazia de a frecventa ședințele în cadrul ambelor școli, fondate de către cei doi matematicieni menționați, a fost puternic influențat de talentul și erudiția prof. univ. A. Zâkov și acad. P. Soltan, fapt ce l-a determinat să-și aleagă drept pasiune a întregii sale vieți studierea structurilor discrete și a diverselor generalizări ale acestora, folosite cu succes pentru soluționarea multiplelor probleme de ordin atât teoretic, cât și aplicativ.

Încă din anii studenției, pe când frecventa seminarul științific de teoria grafurilor, condus de către prof. A. Zâkov, a studiat o problemă importantă ce ține de orientarea tranzitivă a grafurilor neorientate, obținând primele rezultate științifice personale. Grafurile tranzitiv orientabile își găsesc aplicații într-un șir de domenii importante, în special în informatică la examinarea corectitudinii algoritmilor și testarea softurilor respective. Odată cu plecarea prof. A. Zâkov din Chișinău aceste cercetări au fost întrerupte pentru un timp, autorul revenind la ele ceva mai târziu împreună cu unul dintre doctoranzii săi, Nicolae Grigoriu. Acesta din urmă a avut drept temă de cercetare studierea structurii grafurilor tranzitiv orientabile, soldată cu susținerea tezei de doctor în științe fizico-matematice.

După plecarea lui A. Zâkov, subsemnatul a aderat la școala condusă de către academicianul P. Soltan, care i-a devenit o călăuză pentru toată viața. Intuiția și percepția extraordinară a lucrurilor în matematică a dlui academician a contribuit enorm la formarea profesională a câtorva generații de matematicieni prin formularea, examinarea și soluționarea multor probleme cu un impact aplicativ pronunțat. Pe parcursul a peste 40 de ani, în cadrul Facultății de Matematică și Informatică a Universității de Stat din Moldova a funcționat renumitul seminar științific sub conducerea lui Petru Soltan, la care au fost prezentate și discutate practic toate rezultatele științifice obținute în domeniul matematicii discrete, și nu numai. La ședințele acestui seminar au fost analizate rezultatele cu privire la fundamentarea teoretică a teoriei convexității în cazul spațiilor metrice discrete, metode de soluționare a problemelor de amplasare interpretate prin căutarea centrului sau medianei într-un graf neorientat și diverse variații ale acestora, a problemei de divizare a unui corp rectiliniu în mulțimi convexe, au fost puse bazele topologiei algebrice a complexului de relații multi-are care au permis, la rândul său, elaborarea unor metode elegante de soluționare a problemelor practice etc.

Doar enumerarea rezultatelor științifice obținute de către discipolii școlii academicianului Petru Soltan și prezentate în cadrul seminarului științific respectiv ar necesita câteva pagini de text, iar valoarea științifică a acestora este incontestabilă, fiind menționată cu diferite ocazii de către matematicieni cu renume, printre care academicianul Radu Miron (România) [22, 23], Mitrofan Ciobanu (Republica Moldova) [22], Vladimir Boltyansky (Rusia) [2, 3], Horst Martini (Germania) [2, 6] și mulți alții. Totuși nu putem trece cu vederea o parte dintre cele mai valoroase cercetări asupra cărora ne vom opri în continuare. Primele rezultate obținute nu țin nemijlocit de examinarea unor spații discrete anume, însă acestea au servit drept imbold pentru investigațiile ulterioare în cazul unor structuri matematice discrete importante.

A. Dezvoltarea convexității în spații metrice. Convexitatea clasică și-a demonstrat utilitatea prin aplicarea rezultatelor ce țin de proprietățile mulțimilor convexe la soluționarea unor probleme majore și dezvoltarea de direcții principial noi în matematică. Astfel, de exemplu, în teoria programării liniare un rol fundamental îl joacă proprietatea de convexitate a mulţimii soluţiilor admisibile şi a funcţiei obiectiv. Din punct de vedere formal, convexitatea este o proprietate geometrică simplă a submulţimilor unui spaţiu liniar, în care sunt definite operaţiile de adunare şi înmulţire la un scalar ce verifică proprietăţile standard de distributivitate şi asociativitate. Prin anii 1960–1970, la Chișinău, un grup de matematicieni în frunte cu Petru Soltan, au obţinut un şir de rezultate care au constituit fundamentul unei direcţii noi de investigaţii şi care au dat un conţinut mai variat rezultatelor clasice din domeniul mulţimilor convexe ale unui spaţiu linear. Aceste rezultate au stat la baza fundamentării unei Teorii Axiomatice a Convexităţii şi au contribuit la soluționarea mai multor probleme cu caracter practic. Reieșind din necesităţile dezvoltării teoriei convexităţii şi generalizării noţiunii de mulţime convexă s-a propus următorul concept. Fie (X, d) un spaţiu metric, iar $x_1, x_2 \in X$ – două puncte arbitrare. Mulţimea $<x_1,x_2>=\{x: d(x_1, x_2)=d(x_1, x)+d(x, x_2)\}$ se numește *segment metric* cu extremitățile x_1 și x_2 al spațiului indicat. Submulţimea $M \subset X$ va fi numită *d-convexă*, dacă pentru oricare două puncte $x_1, x_2 \in M$ rezultă relaţia $<x_1, x_2> \subset M$. Acest concept conduce la o nouă teorie – *teoria d-convexității* (a se vedea lucrările [2], [3], [5], [7]).

Mai întâi au fost obţinute un şir de rezultate de bază ce ţin de proprietăţile mulţimilor convexe în spaţiul normat R^n, distanţa în care se introduce în mod standard: pentru $\forall\, x_1, x_2 \in R^n$ se definește $d(x_1, x_2)=||x_1-x_2||$ (a se vedea lucrările [2] şi [5]). Proprietăţile de bază ale mulţimilor *d*-convexe, care au stat la baza cercetărilor ulterioare, sunt:

(a) intersecţia oricărui ansamblu de mulţimi *d*-convexe din R^n este *d*-convexă;

(b) o mulţime $M \subset R^n$ este *d*-convexă dacă şi numai dacă pentru oricare $x_1, x_2 \in M$ fiecare curbă simplă $c(x_1, x_2)$ de lungimea $||x_1-x_2||$ aparţine lui M;

(c) o mulţime convexă din R^n este *d*-convexă, dacă şi numai dacă $\Sigma^n(0, 1) \subset R^n$ este *strict* convexă, unde $\Sigma^n(0, 1)$ e discul lui R^n. Astfel, orice mulţime *d*-convexă este şi convexă. Prin urmare, noţiunea de mulţime *d*-convexă este *mai fină* decât cea convexă pentru spaţiu linear;

(d) intersecţia tuturor mulţimilor *d*-convexe din R^n , ce conţin o mulţime dată M, se numeşte *anvelopă convexă* a lui M şi se notează prin *d-conv*M. S-a constatat că pentru o mulţime mărginită $M \subset R^n$ anvelopa *d*-convexă poate să nu fie mărginită;

(e) nu orice plan din R^n este *d*-convex. Pentru a formula criteriul respectiv e necesar a ţine cont de definiţia unei *fațete* pentru o mulţime M din R^n, în sensul Bourbaki. Un subspaţiu L din R^n este *d*-convex dacă și numai dacă pentru orice $x \in L \cap bd\Sigma^n(0, 1)$ fațeta $F_x \subset L$;

(f) O mulțime $M \subset R^n$ este *d*-convexă dacă și numai dacă ea poate fi reprezentată ca intersecția unei familii de semispații *d*-convexe din R^n;

(g) Orice fațetă a unei mulțimi *d*-convexe din R^n este *d*-convexă și reciproc, orice mulțime convexă din R^n cu fațetele *d*-convexe este *d*-convexă. Are loc proprietatea: dacă $F=\{F_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ e mulțimea de fațete ale unui corp M *d*-convex din R^n, atunci frontiera bdM satisface relația $bdM=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$, $F_{\lambda 1} \cap F_{\lambda 2}=\emptyset$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

(h) Dacă $M \subset R^n$ e un corp *d*-convex, atunci prin orice punct $x \in bdM$ de frontieră trece un hiperplan Γ_x de sprijin d-convex.

(i) Fie M_1, $M_2 \in R^n$ două corpuri compacte și *d*-convexe fără puncte comune interioare. Atunci există două conuri *d*-convexe K_1, $K_2 \subset R^n$ cu un vârf comun și simetrice față de acest vârf, încât $M_1 \subset K_1$, $M_2 \subset K_2$. În cazul când discul spațiului e strict convex, K_1 și K_2 reprezintă semispații, reuniunea cărora coincide cu R^n. Frontiera comună a acestor semispații fiind un hiperplan, reprezintă planul ce separă mulțimile convexe M_1 și M_2 (situația clasică) ale unui spațiu linear.

Rezultatele enumerate, obținute la studierea mulțimilor *d*-convexe, demonstrează existența unui nou model de geometrie convexă în spațiul R^n, care, evident, prezintă o generalizare a convexității clasice, adaptate ulterior pentru structuri discrete, reprezentate prin grafuri neorientate.

B. Divizarea figurii în părți *d*-convexe. Rezultate impunătoare, recunoscute de către specialiștii în domeniu din alte țări, au fost obținute la studierea problemei de divizare a unui domeniu în părți *d*-convexe. Cercetările în această direcție au fost generate de încercarea de a soluționa o problemă practică de la Uzina de computere din Minsk. Problema, apărută prin anii 1980, rămâne actuală și astăzi datorită numeroaselor variații ale acesteia, precum și a rezultatelor științifice obținute.

În varianta inițială aceasta se referă la divizarea unei plăci poligonale, laturile căreia au două direcții perpendiculare, iar interiorul dispune de găuri cu dimensiunea k, 0≤k≤2. Pentru optimizarea procesului tehnologic, inginerii de la uzina din Minsk erau preocupați de problema prin care se cerea ca această placă să fie divizată într-un număr minimal *p* de dreptunghiuri. Matematicienii din Bielorusia – N. Kornienco, G. Matveev, N. Metelsky și R. Tyszkiewicz –, au rezolvat cazul doar când placa nu are găuri. La timpul respectiv, problema a fost cu succes soluționată de către Petru Soltan și Chiril Prisăcaru, care au indicat o formulă de calcul a numărului *p* pentru cazul când placa respectivă reprezintă un poligon arbitrar mărginit, având găuri de orice dimensiuni, expunând și un algoritm eficient pentru cazul inițial cu găuri. Însă placa în cauză, la practica de formare a pieselor electronice, cerea și divizări speciale, chestiuni ce au fost rezolvate definitiv în lucrările lui Petru Soltan și Horst Martini (Germania), Ion Băț, Chiril Prisacaru (a se vedea lucrările [6], [7], [8]). Aceste rezultate se obțin prin metode topologice și teoria *d*-convexității. Rezultatele respective dau răspuns la unele chestiuni din tehnologia producerii de piese electronice pentru computere.

C. Calcularea centrului și a medianei în grafurile neorientate. Grafurile s-au dovedit a fi un model matematic eficient pentru modelarea diferitor procese legate de soluționarea problemelor practice. Interesul matematicienilor moldoveni față de teoria grafurilor se datorează în mare măsură monografiei matematicianului francez C. Berge [1], care a fost obiectul de studiu la seminarul de teorie a grafurilor condus de Petru Soltan în cadrul Institutului de Matematică.

Cercetările privind teoria grafurilor, determinate de acest seminar, au fost de la bun început legate de probleme practice, în special de problema amplasării unităților de producere și de deservire. În diverse domenii de activitate deseori apar probleme care se modelează cu ajutorul grafurilor neorientate, iar soluția lor se determină în urma examinării problemelor de calculare a medianei și a centrului în graful respectiv. Aici au fost obținute rezultate impunătoare expuse în lucrările [10], [14], [15].

Problema determinării centrului unui graf cu ponderi aleatoare ale vârfurilor se caracterizează în primul rând prin valoarea practică a rezultatelor teoretice obținute. În varianta clasică, ponderea unui vârf *v* a grafului G este un număr real *q(v)*. Cercetările recente, efectuate de către discipolii școlii de matematică discretă, se referă la cazul când ponderile vârfurilor sunt mărimi aleatoare, mai exact, fiecărui vârf x_j i se asociază o variabilă aleatoare ξ_j cu valori pozitive, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ fiind independente (*n* reprezintă numărul de vârfuri ale grafului). Astfel, dacă variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sunt independente, atunci problema determinării vârfurilor centrale este echivalentă cu aflarea vârfurilor v_k care maximizează produsul $\prod_{j\neq k} F_{\xi_j}\left(\frac{t}{d(v_k, v_j)}\right)$. Dificultățile ce apar la rezolvarea acestei probleme țin de funcțiile de repartiție $F_{\xi_j}, j=\overline{1,n}$. Prin cercetările efectuate s-a demonstrat, că problema centrului unui graf cu ponderi aleatoare ale vârfurilor se reduce la determinarea centrului generator al unui graf special construit. S-a cercetat cazul când ponderile vârfurilor reprezintă variabile aleatoare independente cu repartițiile uniforme. Rezultate importante sunt obţinute pentru toate repartiţiile uniforme posibile. În afară de aceasta, s-au determinat repartiţiile care permit soluționarea problemei ca și în cazul repartiţiei uniforme. Au fost elaboraţi algoritmi de rezolvare a problemelor obţinute. În particular s-a dat descrierea unor algoritmi bazaţi pe modelarea variabilelor aleatoare și determinarea repartiţiilor ce caracterizează centrul grafului.

D. Convexitatea în grafurile neorientate. Grafurile, la rândul său, reprezintă un spaţiu metric discret pentru care s-au obţinut rezultate impunătoare atât din punct de vedere teoretic, cât și din punct de vedere practic. Astfel, prin intermediul noţiunii de *d*-convexitate a fost descrisă și caracterizată o nouă clasă importantă de grafuri, care în raport cu teoria *d*-convexităţii prezintă un interes deosebit (a se vedea [19], [34]).

Fie G=(X,U) graf neorientat conex. Mulţimea de vârfuri $A \subset X$ este *d*-convexă dacă pentru oricare două vârfuri din A ea conţine și vârfurile ce aparţin tuturor lanţurilor de lungime minimă ce leagă aceste vârfuri în G. Un graf se numește *d-convex simplu* dacă acesta nu conţine mulţimi *d*-convexe $A \subset X$ cu proprietatea 2<|A|<|X|. Grafurile *d-convex quazisimple* sunt acelea în care orice mulţime *d*-convexă a sa generează un subgraf complet. Prin investigaţiile făcute au fost generalizate rezultatele obţinute de către matematicienii S. Hebbare și M. Batten. Caracterizarea constructivă obţinută și descrisă în lucrările [12] și [13] ţine de o operaţie specială definită asupra grafurilor neorientate. Prin intermediul operaţiilor descrise a fost obţinută o caracterizare constructivă a clasei de grafuri *d*-convex simple și *d*-convex quazisimple planare, în virtutea căreia se rezolvă eficient un șir de probleme clasice: problema izomorfismului, problema construcţiei arborelui Steiner, problema centrului, problema medianei etc. Pentru studierea acestor grafuri a fost introdusă o operaţie nouă, importantă pentru descrierea și generarea unor clase noi de grafuri *d*-convex simple.

Fie G_1 și G_2 două grafuri *d*-convex simple în care există câte o pereche de vârfuri copii, x_1, x_2 în G_1 și y_1, y_2 în G_2. Notăm prin $M^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}$ (G_1, G_2) graful obţinut din grafurile G_1 și G_2 prin alipirea vârfurilor x_1 cu y_1 și x_2 cu y_2. Astfel, graful nou obţinut $G=M^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}(G_1, G_2)$ va conţine cu două vârfuri mai puţin decât reuniunea vârfurilor grafurilor G_1 și G_2 și tot atâtea muchii câte G_1 și G_2 luate împreună. Are loc rezultatul prin care se afirmă că dacă G_1 și G_2 sunt două grafuri *d*-convex simple în care există câte o pereche de vârfuri copii, x_1, x_2 în G_1 și y_1, y_2 în G_2 atunci graful $G=M^{x_1=y_1}_{x_2=y_2}$ (G1, G2) este *d*-convex simplu. De aici rezultă că operaţia M introdusă mai sus este o operaţie algebrică pe mulţimea grafurilor *d*-convex simple. În lucrarea [11] sunt expuse rezultate ce ţin de amplasarea grafurilor *d*-convex simple în spaţii euclidiene și se expune algoritmul de amplasare a grafurilor *d*-convex simple planare în spaţiul R^3. Aceste rezultate au fost generalizate mai târziu, după fundamentarea unei direcții noi de cercetare în matematică – teoria complexelor de relații multi-are.

Rezultatele teoretice legate de studierea grafurilor *d*-convex simple se regăsesc pe deplin în monografia [16]. Structura deosebită a acestor grafuri permite elaborarea algoritmilor de complexitate polinomială pentru soluționarea problemelor practice, cum ar fi problema centrului, problema medianei, problema determinării ciclului Euler și ciclului Hamilton necesare la examinarea problemelor de parcurgere. În unele cazuri, precum cel al grafurilor *d*-convex simple planare, algoritmii respectivi sunt de complexitate liniară, deoarece aceste grafuri se construiesc pe arbori, iar pe arbori majoritatea problemelor se rezolvă în timp liniar. Referitor la unele rezultate specifice ale grafurilor *d*-convex simple și aplicării acestora la soluționarea problemelor practice pot fi consultate mai multe publicații (a se vedea lucrările [17]-[21]).

E. Orientarea tranzitivă a grafurilor. Atenția majoră a matematicienilor față de grafurile tranzitiv orientabile se datorează în primul rând rolului pe care îl joacă aceste grafuri la soluționarea problemelor teoretico-aplicative din diverse domenii. Deja sunt bine cunoscute unele rezultate ce țin de analiza existenței instrucțiunilor de ieșire în codul sursă al programelor [24], decompoziția rețelelor Petri [25], analiza grafurilor moleculare [26] etc. Rezultatele obținute pentru moment generează la rândul său probleme noi care necesită studii suplimentare. E de menționat faptul că grafurile tranzitiv orientabile servesc drept model eficient pentru soluționarea în timp polinomial a unor probleme importante care în caz general sunt NP-complete. De exemplu, pe clasa de grafuri menționată se rezolvă în mod eficient problema determinării clicii maximale ponderate, cea a numărului de stabilitate internă al unui graf neorientat [27], precum și unele variații ale problemei de colorare a grafurilor [28], [29], [30].

E cunoscut faptul că problema de sortare încă rămâne a fi o problemă actuală în combinatorică și informatică. Mulțimile parțial ordonate reprezintă o direcție de cercetare cu rezultate teoretice valoroase ce au multe aplicații în diverse domenii ale matematicii și informaticii. Mulțimile parțial ordonate pot fi reprezentate prin clasa grafurilor tranzitiv orientabile. Astfel, reorientarea arcelor într-un graf tranzitiv orientabil duce la sortarea elementelor mulțimii parțial ordonate ce este reprezentată prin graful tranzitiv orientabil.

Studiind grafurile tranzitiv orientabile, au fost obținute un șir de rezultate care au completat esențial studiul în această direcție. Printre principalele pot fi menționate:

a) în urma examinării problemei de caracterizare structurală a grafurilor tranzitiv orientabile, a fost elaborată metoda de construire a tuturor orientărilor tranzitive într-un graf, chestiune extrem de importantă din punct de vedere teoretic prin faptul că permite o vizualizare integrală a orientărilor tranzitive ale unui graf;

b) studiind proprietățile unor subgrafuri speciale, numite B-stabile, și folosind șirul complet de grafuri factor a devenit posibilă caracterizarea completă a tuturor orientărilor tranzitive, precum și obținerea unei formule recurente de calculare a numărului de orientări tranzitive;

c) rezultatele teoretice ce țin de studierea proprietăților lanțurilor netriangulate și a subgrafurilor stabile au condus la elaborarea metodelor și algoritmilor eficienți ce vizează construirea orientării tranzitive a grafurilor;

Totodată, studierea acestor grafuri inspiră încrederea că folosind rezultatele teoretice și metodele de generare a orientărilor tranzitive ar putea fi soluționate suplimentar probleme importante, cum ar fi:

a) decompoziția rețelelor Petri, chestiune importantă în informatică, și nu numai;

b) analiza codului sursă a programelor;

c) obținerea mecanismului de orientare tranzitivă mixtă a grafurilor.

F. Complexul de relații multi-are ca generalizare a structurile matematice discrete clasice. Pornind de la cercetările efectuate în baza structurilor matematice discrete clasice prin anii 1960–1970 ai secolului trecut, în timp s-a simțit necesitatea continuării cercetărilor sub două aspecte: 1) generalizarea structurilor clasice prin introducere unui obiect matematic și 2) căutarea unor idei noi pentru elaborarea metodelor de soluționare a problemelor dificile de rezolvat prin metodele standard. Astfel, la începutul anilor 2000, a intrat în circuit noțiunea de complex de relații multi-are, determinat de o familie de relații multi-are, definite pe produsul cartezian al unei mulțimi de elemente. Această structură nouă s-a dovedit a fi destul de utilă la modelarea proceselor cu acțiune discretă și a condus la elaborarea metodelor eficiente de soluționare a problemei practice. În mod special, a fost propusă o metodă elegantă de calculare a medianei ponderate, fără a folosi metrica spațiului, a problemei de comportament al jucătorilor într-un joc combinatorial etc.

Astfel a fost creată o direcție nouă de cercetare ce constă în fundamentarea teoriei complexelor de relații multi-are, prin care se generalizează mai multe structuri discrete clasice cunoscute ca grafuri, hipergrafuri, matroizi, complexe de simplexe, ceea ce a contribuit la elaborarea modelelor și metodelor eficiente în vederea aplicării acestora la soluționarea problemelor de optimizare discretă. Pe lângă problemele menționate, pentru care s-a găsit o viziune nouă și eficientă de determinare a soluției optime, au fost înregistrate și alte succese:

a) examinarea topologiei algebrice a complexului de relații multi-are cu ajutorul grupurilor de omologii directe și duale, chestiune care a ridicat la alt nivel cercetările în domeniul matematicii discrete;

b) determinarea structurii complexului de cuburi cu ajutorul grupurilor de omologii, ceea ce a permis obținerea unor algoritmi eficienți de soluționare a problemelor de amplasare pentru care problema medianei se rezolvă în mod eficient fără a apela la metrica spațiului respectiv;

c) deducerea unei formule eficiente de calcul a numărului ciclomatic, chestiune importantă pentru stabilirea proprietăților combinatoriale ale unui astfel de complex, necesare la soluționarea problemelor aplicative. Calcularea numerelor ciclomatice se face printr-o formulă recurentă, folosind rangurile grupurilor de omologii ale complexului;

d) obținerea formulei Euler-Poincare pentru un complex de cuburi abstracte. Formula respectivă a servit drept instrument eficient pentru examinarea proprietăților varietăților, determinate de un astfel de complex, și clasificarea ulterioară a acestora;

e) determinarea condițiilor în care o varietate degenerată abstractă orientabilă, fără borduri și conexă forte (determinată de complexul de relații multi-are) reprezintă o varietate sferică. Acest rezultat a fost folosit pentru obținerea clasificării varietăților abstracte degenerate, reprezentate printr-un șir de varietăți cu $p \geq 0$ găuri, obținute în mod constructiv.

Mai profund, rezultatele ce țin de studierea complexului de relații multi-are și utilizarea acestora la soluționarea problemelor aplicative se regăsesc în monografia [31], precum și în unele lucrări separate [32] - 36].

G. Metode ale matematicii discrete în criptarea informației. Printre aplicațiile practice ale mulțimilor de relații multi-are, care au instrumentar la fondarea direcției noi în matematică, cunoscută astăzi drept teoria complexelor de relații multi-are, un loc aparte îl ocupă cercetările legate de elaborarea metodelor de criptare a informației. Problema de stocare și protejare a datelor a fost și rămâne în continuare una dintre preocupările specialiştilor. Odată cu dezvoltarea tehnicii şi tehnologiilor noi de prelucrare a datelor se pune accent tot mai mare pe siguranţa sistemelor de criptare. Sistemele actuale de criptare sunt vulnerabile, iar în cazul unor cantităţi mari de informaţie necesită un volum destul de mare de memorie şi au viteză redusă de lucru. Această situaţie face ca problema elaborării unor metode (sisteme) mai performante să rămână în vizorul elaboratorilor sistemelor de criptare.

Pornind de la mulţimile de relaţii multi-are, în monografia [37] se propune un sistem nou de criptare, elaborarea căruia se face prin construirea matricei multidimensionale de relaţii multi-are şi proprietăţi speciale ale funcţiilor booleene. S-a reuşit construirea a doi algoritmi de criptare în baza cărora se află matricele multidimensionale de mulţimi de relaţii şi funcţiile booleene (e vorba de algoritmul numit *Cripto 3*) sau funcţiile din logica q-valentă (e vorba de algoritmul numit *Cripto 4*), timpul de lucru al acestor algoritmi fiind mult mai mic decât la algoritmul simetric AES utilizat în prezent în calitate de standard naţional în SUA. Ambii algoritmi menţionaţi mai sus au trezit interes la specialişti din unele organizaţii de la noi din ţară, activitatea cărora este legată, în mare măsură, de stocarea şi protejarea datelor. În astfel de sisteme de criptare ar fi cointeresate băncile comerciale, forţele armate, diverse instituţii financiare. Desigur că implementarea acestora necesită soluţionarea la pachet şi a unor probleme de alt ordin.

BIBLIOGRAFIE

1. Berge C. Theorie des graphes et des applications. Paris, 1958. 230 p.

2. Boltyanski V., Martini H., Soltan P. S. Excursion into Combinatorial geomtery. Springer, 1997. 423 p.

3. Болтянский В. Г., Солтан П. С. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. Кишинев: Штиинца, 1978. 280 стр.

4. Солтан В. П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984. 224 стр.

5. Солтан П. С. Экстремальные задачи на выпуклых множеств. Кишинев: Штиинца, 1976, 116 стр.

6. Martini H., Soltan P. On convex partitions of polygonal regions. Discrete Mathematics 195, 1999, p. 167-180.

7. Soltan P., Băţ I. Asupra divizării în părţi convexe a poliedrelor în spaţiu Euclidian. Lucrările Seminarului Tiberiu Popoviciu. Cluj-Napoca, 2001, p. 13-17.

8. Солтан П. С., Присакарь А.В., Чепой В. Д. О разбиениях многогранника на параллелепипеды. Докл. Академии Наук БССР, Т. XXXIV, N.10, 1990, стр. 876-879.

9. Soltan P. S., Cataranciuc S. G., Cepoi V. D., Gherman L. T., Prisacaru Ch. T., Soltan V. P. Convexitatea generalizată şi aplicaţiile ei. Lucrările Conf. pregătitoare pentru Congresul Matem-lor Români de pretutindeni, Vol.1, Chişinău, RSS Moldova, 1993, p. 145-154.

10. Cataranciuc S., Scripnic M., Soltan P. About the median that does not depend on the metric space. The 30-th Annual Congress of the American Romanian Academy of Arts and Sciences (ARA). Proceedings. Chişinău. July 5-10, 2005, p. 58-61.

11. Cataranciuc S., Vicol N. Involving d-convex simple and quasi-simple planar graphs in R^3. Computer Sc. J. of Moldova. V.13, nr. 2(38). Chişinău, 2005, p. 151-167.

12. Катаранчук С. Г., Солтан В. П. d-Выпукло простые и d-выпукло квазипростые планарные графы. Депонированная рукопись. Кишинев, 1988. 23 стр.

13. Катаранчук С. Г. d-Выпукло простые графы. Исследования по общей алгебре, геометрии и их приложения, Кишинев: Штиинца, 1986. стр. 92-96.

14. Poştaru A., Prodan N. The center of a graph with stochastic weigh. Studii în metode de analiză numerică şi optimizare. Chişinău: 2001, p. 25-27.

15. Poştaru A., Prodan N. The center of a graph with stochastic weight. Studii în metode de analiză numerică şi optimizare. Chişinău: 2001, p. 25-27.

16. Cataranciuc S., Sur N. Grafuri d-convex simple şi quasisimple. Monografie. Chişinău: CEP USM, 2009. 201 p.

17. Cataranciuc S., Sur N. About directed d-convex simple graphs. Computer Science Journal of Moldova, vol. 16, no.3(48), 2008, p. 323-346.

18. Cataranciuc S. Convexitatea simplă a grafurilor orientate. Conferinţa Internaţională „Modelare matematică, optimizare şi tehnologii informaţionale". Ediţia III. Chişinău, 19-23 martie, 2012, p. 9-19.

19. Cataranciuc S. The median calculation for a EBP-graph. Int. conf. „Discrete mathematics, graph theory and their applications (DIMA-2013)". Minsk, Belorusia, november 11-14, 2013, p. 44-45.

20. Cataranciuc S., A. Niculiţă. Aspecte algoritmice ale teoriei grafurilor. Partea I. Chişinău: CEP USM, 2006. 144 p.

21. Cataranciuc S., Niculiţă A., Novac L. Aspecte algoritmice ale teoriei grafurilor. Partea II. Chişinău: CEP USM, 2012. 174 p.

22. Ciobanu M., Miron R. O cercetare originală în topologia modernă. Reflecţii asupra corelaţiilor dintre abstract şi real. AKADEMOS. Revistă de Ştiinţă, Inovare, Cultură şi Artă a Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Nr. 1(36), 2015, p. 68-77.

23. Miron R., Pitiş Gh., Pop I. On the abstract Čech cohomology, Bul. Acad. Ştiinte Repub. Mold., seria Matematica. Nr. 2(66), 2011, p. 41-59.

24. Евстигнеев В. А. Применение теории графов в программировании. Москва: Наука, 1985, 352 с.

25. Wisniewski R., Karatkevich A., Adamski M., Kur D. Application of comparability graphs in decomposition of Petri nets, Human System Interactions (HSI), 2014 7th International Conference, 2014, p. 216-220.

26. Basak S. C., Restrepo G., Villaveces L J. Advances in Mathematical Chemistry and Applications. vol. 1, Bentham Books, Bogota, Columbia, 2014. 337 p.

27. Shamir R. Advanced Topics in Graph Algorithms, Sariel Har-Peled, Ed. Tel-Aviv: Tel-Aviv University, 1994, 153 p.

28. Golumbic M. C. Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs (Annals of Discrete Mathematics). Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 2004, vol. 57. 340 p.

29. Cornelsen S., Di Stefano G. Treelike comparability graphs: Characterization, Recognition, and Applications, Elsevier, vol. 157, no. 8, 2009, p. 1711-1722.

30. Pal A. J., Sarma S. S., Biman R. CCTP, Graph Coloring Algorithms - Soft Computing Solutions, Proceedings of 6th IEEE International Conference on Cognitive Informatics, 2007, p. 364-372.

31. Cataranciuc S. Topologia algebrică a relațiilor multi-are. Monografie. Chișinău: CEP USM, 2015. 228 p.

32. Cataranciuc S., Bujac-Leisz M., Soltan P. The Euler tour of n-dimensional manifold with positive genus. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova, 2008, nr. 2(57), p. 110-113.

33. Cataranciuc S. The abstract complex of multidimensional relations. Sevent Workshop on Mathematical Modeling of Environmental and Life Sciences Problems. Constantza, 22-25 october 2008, p. 11-12.

34. Cataranciuc S. The cubical abstract tree and its median. Mathematical modelling of invironmental and life sciences problems. București: Ed. Acad. Române, 2010, p. 157-166.

35. Cataranciuc S. Median calculation for heterogenous complex of abstract cubes. Computer Science Journal of Moldova. vol. 21, no.1(61), 2013, p. 120-141.

36. Cataranciuc S., Bujac M., Soltan P. On the Division in Cubes of Abstract Manifolds. Buletinul Academiei de Științe a Republicii Moldova. Matematica, nr. 2(51). Chișinău, 2006, p. 29-34.

37. Bulat M., Cataranciuc S., Zgureanu A. Mulțimi de relații multi-are și criptarea informației. Monografie. Chișinău: CEP USM, 2013. 208 p.

Ion Moraru. *Muza din Grecia Antica - 1*,
cărbune, 53 × 40 cm, 2010.

Ion Moraru. *Muza din Grecia Antica - 2*,
cărbune, 53 × 40 cm, 2010.